



Teorija štapa - sažetak

Jednačine koje definišu statičke, deformacijske i 'kinematičke' funkcije štapa:

- **statičke jednačine** – zavisnost statičkih veličina duž štapa od statički nezavisnih veličina i opterećenja:

$$N(x) = S_{ik} + N_0(x) = S_{ik} + \frac{1}{2} R_x - \int_i^x p_x(x) dx \quad (1)$$

$$T(x) = \frac{1}{l_{ik}} (M_{ki} - M_{ik}) + T_0(x) = \frac{1}{l_{ik}} (M_{ki} - M_{ik}) + R_y \xi'_R - \int_i^x p_y(x) dx \quad (2)$$

$$M(x) = M_{ik} \cdot \xi' + M_{ki} \cdot \xi + M_0(x) = \\ M_{ik} \cdot \xi' + M_{ki} \cdot \xi + R_y \cdot \xi'_R \cdot (x - x_i) - \int_i^x (x - t) \cdot p_y(t) dt \quad (3)$$

- **deformacijske jednačine** – zavisnost deformacijskih veličina duž štapa od statičkih veličina i temperaturnih uticaja:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{N(x)}{EF} + \alpha_t t^\circ \quad (4)$$

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \quad (5)$$

$$\varphi_T(x) = \frac{kT(x)}{GF} \quad (6)$$

- '**kinematičke' jednačine** – zavisnost pomjeranja i obrtanja duž štapa od kinematički nezavisnih veličina i deformacija

$$u(x) = u_i + u_0(x) = u_i + \int_i^x \varepsilon_x(x) dx = u_k + \Delta l_{ik} - \int_x^k \varepsilon_x(x) dx \quad (7)$$

$$v(x) = \xi' v_i + \xi v_k + v_0(x) = \xi' v_i + \xi v_k + \xi l_{ik} \tau_{ik} - \int_i^x [(x - t) \kappa(t) - \varphi_T(t)] dt = \quad (8)$$

$$\xi' v_i + \xi v_k - \xi l_{ik} \tau_{ki} - \int_x^k [(t - x) \kappa(t) + \varphi_T(t)] dt$$

$$[\varphi - \varphi_T](x) = \psi_{ik} + [\varphi - \varphi_T]_0(x) = \frac{v_k - v_i}{l_{ik}} + \tau_{ik} - \int_i^x \kappa(x) dx = \\ = \frac{v_k - v_i}{l_{ik}} + \tau_{ki} + \int_x^k \kappa(x) dt \quad (9)$$



gdje su:

$$S_{ik} = \frac{N_{ik} + N_{ki}}{2} \quad - \text{ aksijalna sila}$$

$$k = \frac{F}{I^2} \int_F \frac{S^2(y)}{b^2(y)} dF \quad - \text{ koeficijent korekcije smicanja}$$

$$\tau_{ik} = \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (\xi l_{ik} \kappa(x) - \varphi_T(x)) \epsilon \quad \text{deformacioni ugao u presjeku } i, \text{ odnosno u presjeku } k \text{ u funkciji deformacija}$$

$$\tau_{ki} = \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (\xi l_{ik} \kappa(x) - \varphi_T(x)) a$$

$$\tau_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_{ik} - \psi_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_{ik} - \frac{v_k - v_i}{l_{ik}} \quad - \text{ deformacioni ugao u presjeku } i, \text{ odnosno u presjeku } k \text{ u funkciji kinematičkih veličina}$$

$$\tau_{ki} = (\varphi - \varphi_T)_{ki} - \psi_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_{ki} - \frac{v_k - v_i}{l_{ik}}$$

$$\Delta l_{ik} = \int_i^k \epsilon_x(x) dx = u_k - u_i \quad - \text{ promjena dužine tetive ose štapa}$$

Veličine Δl_{ik} , τ_{ik} , τ_{ki} često nazivamo **deformacijski nezavisne veličine** štapa.

Statički moment površine:

$$- \text{ pravougaoni poprečni presjek: } S_z(y) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$- \text{ kružni poprečni presjek: } S_z(y) = \frac{2}{3} \sqrt{(r^2 - y^2)^3}$$

U *deformacijskom modelu* štapa (kada su nam zadate samo kinematički nezavisne veličine) ćemo pretpostaviti da je momenat savijanja na desnom kraju štapa pozitivan ako **djeluje u smjeru kazaljke na satu** (dakle suprotno od standardne konvencije da je momenat savijanja pozitivan kad zateže donju stranu). Tako deformacijski nezavisne veličine možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} \Delta l_{ik} &= S_{ik} + \delta_{ik}^{(o)} + \delta_{ik}^{(t)} \\ \tau_{ik} &= \alpha_{ik} M_{ik} - \beta_{ik} M_{ki} + \alpha_{ik}^{(o)} + \alpha_{ik}^{(\Delta t)} \\ \tau_{ki} &= -\beta_{ki} M_{ik} + \alpha_{ki} M_{ki} - \alpha_{ki}^{(o)} - \alpha_{ki}^{(\Delta t)} \end{aligned} \quad (10)$$



pri čemu koristimo sledeće obilježavanje:

$$\begin{aligned}\delta_{ik} &= \int_i^k \frac{dx}{EF} & \delta_{ik}^{(o)} &= \int_i^k \frac{N_0(x)}{EF} dx & \delta_{ik}^{(t)} &= \int_i^k \alpha_T t^o dx \\ \alpha_{ik} &= \int_i^k \left(\frac{\xi'^2}{EI} + \frac{k}{l_{ik}^2} \frac{1}{GF} \right) dx & \beta_{ik} &= \int_i^k \left(\frac{\xi' \xi}{EI} - \frac{k}{l_{ik}^2} \frac{1}{GF} \right) dx = \beta_{ki} \\ \alpha_{ki} &= \int_i^k \left(\frac{\xi^2}{EI} + \frac{k}{l_{ik}^2} \frac{1}{GF} \right) dx \\ \alpha_{ik}^{(o)} &= \int_i^k \left(\frac{\xi' M_0(x)}{EI} + \frac{k}{l_{ik}} \frac{T_0(x)}{GF} \right) dx & \alpha_{ki}^{(o)} &= \int_i^k \left(\frac{\xi M_0(x)}{EI} + \frac{k}{l_{ik}} \frac{T_0(x)}{GF} \right) dx \\ \alpha_{ik}^{(\Delta t)} &= \int_i^k \xi' \alpha_T \frac{\Delta t}{h} dx & \alpha_{ki}^{(\Delta t)} &= \int_i^k \xi \alpha_T \frac{\Delta t}{h} dx\end{aligned}$$

Jednačine (10) predstavljaju sistem linearnih jednačina po nepoznatim statički nezavisnim veličinama.

Postupak određivanja funkcija statičkih, deformacijskih i 'kinematičkih' veličina duž štapa

Pri određivanju funkcija statičkih, deformacijskih i kinematičkih veličina mogu se javiti sledeći slučajevi zadatih nezavisnih veličina:

1) tri statičke i tri kinematičke veličine - metoda sila

a) $v_i, v_k, u_i, M_{ik}, M_{ki}$ i N_{ik}

Urađen primjer (u ovaj slučaj spada i ako je eventualno zadato pomjeranje i/ili normalna sila na drugom kraju štapa)

b) $v_i, v_k, u_i, T_{ik}, M_{ki}$ i N_{ik}

Funkciju normalne sile određujemo kao u urađenom primjeru.

Iz izraza (2) za $x = 0$ određena je razlika momenata na krajevima štapa te iz nje dobijamo moment na lijevom kraju štapa što problem svodi na urađeni primjer.

(u ovaj slučaj spada i ako je eventualno zadat moment savijanja i/ili transverzalna sila na suprotnom kraju štapa)

c) $v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, u_i, M_{ik}, M_{ki}$ i N_{ik}

Statičke i deformacijske veličine određujemo kao u urađenom primjeru.

Nakon toga odredimo deformacioni ugao τ_{ki} a iz njega vertikalno pomjeranje desnog kraja štapa te smo opet u okvirima riješenog primjera. (u ovaj slučaj spada i ako je eventualno zadato vertikalno pomjeranje i/ili obrtanje na drugom kraju štapa)



d) $v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, u_i, T_{ik}, M_{ki}$ i N_{ik}

Statičke i deformacijske veličine određujemo kao u slučaju 1(b).

Vertikalno pomjeranje lijevog kraja štapa dobijamo kao u slučaju 1(c). (u ovaj slučaj spada i ako je eventualno zadato vertikalno pomjeranje i/ili obrtanje na drugom kraju štapa)

.....

Napomena: ne možemo imati zadane dvije transverzalne sile jer nisu međusobno nezavisne.

2) **šest kinematičkih veličina - metoda deformacije** $v_i, u_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, v_k, u_k, (\varphi - \varphi_T)_k$

Metoda deformacije koristi vezu između deformacionih uglova na krajevima štapa i promjene dužine štapa u funkciji kinematičkih veličina.

Nakon što odredimo ove tri deformacijske veličine, ispišemo izraze (10) i dobijamo jednu jednačinu sa jednom i dvije sa dvije nepoznate. Rješavanjem dobijamo tri statički nezavisne veličine te je problem riješen.

3) **dvije statičke i četiri kinematičke veličine**

a) $M_{ik}, M_{ki}, v_i, u_i, v_k, u_k$

Poznavajući horizontalna pomjeranja oba kraja štapa slijedi da je određena i promjena dužine štapa a s njom i aksijalna sila pomoću koje je definisana funkcija normalne sile. Ovim se problem svodi na metodu sila.

b) $S_{ik}, M_{ik}, v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, v_k, u_k$

Pomoću aksijalne sile je definisana funkcija normalne sile.

Ugao obrtanja na desnom kraju štapa određujemo tako što izrazimo momenat M_{ki} iz jednačine (10)₃ i uvrstimo ga u (10)₂, čime dobijamo jednu jednačinu po nepoznatoj $(\varphi - \varphi_T)_{ki}$. Ovim se problem svodi na metodu deformacije. (u ovaj slučaj spada i ako je eventualno zadat momenat savijanja i/ili ugao obrtanja na suprotnom kraju štapa)

c) $M_{ik}, M_{ki}, v_i, u_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, u_k$

Obzirom da poznajemo oba momenta i oba horizontalna pomjeranja, statičke i deformacijske veličine su određene.

Nakon toga odredimo deformacioni ugao τ_{ik} a iz njega vertikalno pomjeranje desnog kraja štapa te smo opet u okvirima riješenog primjera. (u ovaj slučaj spada i ako je eventualno zadato vertikalno pomjeranje i/ili obrtanje na drugom kraju štapa)

.....

4) **jedna statička i pet kinematičkih veličina**

a) $S_{ik}, v_i, u_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ki}$

Obzirom da možemo odrediti funkciju normalne sile, poznata nam je dilatacija a s njom i horizontalno pomjeranje desnog kraja štapa, te se problem svodi na metodu deformacije.

b) $M_{ik}, v_i, u_i, v_k, u_k, (\varphi - \varphi_T)_{ki}$

Poznavajući horizontalna pomjeranja oba kraja štapa slijedi da je određena i promjena dužine štapa a s njom i aksijalna sila pomoću koje je definisana funkcija normalne sile.

Ugao obrtanja na desnom kraju štapa određujemo tako što izrazimo momenat M_{ki} iz jednačine (10)₃ i uvrstimo ga u (10)₂, čime dobijamo jednu jednačinu po nepoznatoj $(\varphi - \varphi_T)_{ki}$. Ovim se



problem svodi na metodu deformacije. (u ovaj slučaj spada i ako je eventualno zadat momenat savijanja i/ili ugao obrtanja na suprotnom kraju štapa)

c) $M_{ik}, v_i, u_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, u_k, (\varphi - \varphi_T)_{ki}$

Poznavajući horizontalna pomjeranja oba kraja štapa funkcija normalne sile je određena. Uvrštavajući zavisnosti deformacionih uglova od kinematičkih veličina u izraze (10) dobijamo sistem od dvije jednačine sa dvije nepoznate M_{ki} i v_k čijim je rješavanjem problem riješen.

.....

Uopšte

Za određivanje **membranskog stanja** potrebne su nam dvije nezavisne veličine od kojih jedna mora biti kinematička. Tako možemo imati sledeće slučajeve:

1	2	3	4	5
u_i, u_k	u_i, N_{ik}	u_i, N_{ki}	u_k, N_{ik}	u_k, N_{ki}

Za određivanje **problema savijanja** potrebne su nam četiri nezavisne veličine od kojih dvije moraju biti kinematičke. U slučaju da imamo samo dvije kinematičke veličine, bar jedna mora biti vertikalno pomjeranje jer obrtanja na krajevima štapa nisu nezavisna.

Tako možemo imati sledeće slučajeve:

$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ki}$ - metoda deformacije - 1 varijacija

1+4=5	5+4=9
$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, v_k, M_{ik}$	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ik}$
$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, v_k, M_{ki}$	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ki}$
$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, v_k, M_{ik}$	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ik}$
$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, v_k, M_{ki}$	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ki}$



9+4=13	13+16=29
$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ik}, M_{ki}$	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ik}, T_{ik}$
$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ik}, M_{ki}$	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ik}, T_{ki}$
$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ik}, M_{ki}$	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ki}, T_{ik}$
$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ik}, M_{ki}$	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ki}, T_{ki}$
	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ik}, T_{ik}$
	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ik}, T_{ki}$
	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ki}, T_{ik}$
	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ki}, T_{ki}$
	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ik}, T_{ik}$
	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ik}, T_{ki}$
	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ki}, T_{ik}$
	$v_i, (\varphi - \varphi_T)_{ki}, M_{ki}, T_{ki}$
	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ik}, T_{ik}$
	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ik}, T_{ki}$
	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ki}, T_{ik}$
	$v_k, (\varphi - \varphi_T)_{ik}, M_{ki}, T_{ki}$

29+1=30	30+4=34
v_i, v_k, M_{ik}, M_{ki}	v_i, v_k, M_{ik}, T_{ik}
	v_i, v_k, M_{ik}, T_{ki}
	v_i, v_k, M_{ki}, T_{ik}
	v_i, v_k, M_{ki}, T_{ki}

Zaključak:

Za bilo koji štap, izdvojen iz nekog sistema (nosača), možemo odrediti statičko, deformacijsko i kinematičko polje ako poznamo šest nezavisnih veličina na krajevima štapa. Nezavisne veličine ne moraju biti poznate na krajevima štapa već mogu biti i u bilo kojem presjeku, ali pošto je nosač sastavljen od štapova i čvorova, lakše nam je za nezavisne usvojiti veličine koje su zajedničke za obe grupe elemenata nosača (štapove i čvorove).

Štap je, na ovaj način, riješen u **lokalnom koordinatnom sistemu**. Opterećenje proizvoljnog pravca uvijek možemo transformisati iz globalnog u lokalni koordinatni sistem.

Važna napomena:

Pri rješavanju zadatka potrebno je posebnu pažnju obratiti na konvenciju o pozitivnom znaku: T je pozitivna kad obrće presjek u smjeru kazaljke na satu, N kada zateže presjek a M kada zateže 'donju' stranu (izuzetak su jednačine (10) gdje je M pozitivan kada djeluje u smjeru kazaljke na satu). Konvencija za deformacijske veličine se poklapa sa onom za statičke, dok predznak 'kinematičkih' veličina i opterećenja definišemo prema zadanom koordinatnom sistemu.