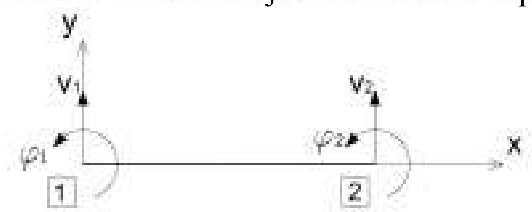
Metod konačnih elemenata – ukratko

Umjesto realnog (kontinualnog) tijela posmatramo njegov *diskretan* model: tijelo sastavljeno od konačnog broja elemenata spojenih samo u čvorovima. Nakon nanošenja opterećenja tijelo se deformiše, te kao nepoznate veličine usvajamo *generalisana pomjeranja* usvojenih čvorova. Pomjeranja ostalih tačaka elementa dobijamo interpolacijom. Dakle, pomjeranja svih tačaka unutar elementa su funkcija pomjeranja njegovih čvorova. Problem je kako odrediti pomake čvorova i naprezanja opterećenog tijela?
Koraci: 1) diskretizacija – dijelimo tijelo na konačan broj elemenata vezanih samo u čvorovima;
2) definisanje n algebarskih jednačina u kojima su nepoznate veličine pomjeranja čvorova;
3) unošenjem poznatih pomjeranja (iz graničnih uslova) i spoljašnjih sila dobijamo sistem od n jednačina sa n nepoznatih – rješavamo.

Radi jednostavnosti, razmotrićemo element 12 zanemarujući membransko naprezanje:



Vektor generalisanih pomjeranja u lokalnom koordinatnom sistemu je $q^T = [v_1 \ \ \varphi_1 \ \ v_2 \ \ \varphi_2]$. Vertikalna pomjeranja duž elementa ćemo aproksimirati polinomom sa 4 generalisane koordinate (kubni polinom): $v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$ što matrično pišemo $v = A \cdot \alpha$, pri čemu je $A = [1 \ \ x \ \ x^2 \ \ x^3]$ i $\alpha^T = [\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3 \ \ \alpha_4]$ (*vektor generalisanih koordinata*).

Ako znamo da je nagib $\varphi(x) = \dfrac{dv}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$ tada vektor pomjeranja možemo zapisati kao

$$q = C \cdot \alpha \quad \text{gdje je} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{iz čega dobijamo} \quad \alpha = C^{-1} \cdot q, \quad C^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^2 & 1/l^2 \end{vmatrix}.$$

Sada možemo pomjeranja duž elementa napisati kao

$$v = A \cdot \alpha = A \cdot C^{-1} \cdot q = N \cdot q$$

gdje je N matrica interpolacionih funkcija pomoću kojih je uspostavljena veza između vertikalnog pomjeranja u bilo kojoj tački elementa i nepoznatih generalisanih pomjeranja u čvorovima:

$$N = \left[1 - 3(x/l)^2 + 2(x/l)^3 \quad l[x/l - 2(x/l)^2 + (x/l)^3] \quad 3(x/l)^2 - 2(x/l)^3 \quad -l[(x/l)^2 - (x/l)^3] \right]$$

Dalji postupak podrazumijeva primjenu relacije o jednakosti spoljašnjeg i unutrašnjeg rada, tj. principa o minimumu potencijalne energije. Konačni cilj je pronalaženje matrice krutosti koja uspostavlja vezu između vektora čvornih sila i vektora generalisanih pomjeranja

$$R = K \cdot q$$

gdje je vektor čvornih sila $R^T = [V_1 \ \ M_1 \ \ V_2 \ \ M_2]$.

Napomena: interpolacione funkcije u obliku polinoma su usvojene radi jednostavnosti (nisu tačna rješenja DJ savijanja po teoriji II reda).

Kada analiziramo **problem stabilnosti** potrebno je uzeti u obzir uticaj aksijalnih sila na savijanje što činimo uvođenjem geometrijske matrice krutosti (K_g), te uslovna jednačina postaje $R = (K - K_g) \cdot q$. Na ovaj način uprošćujemo problem te dobijamo približne rezultate. Veću tačnost postižemo usvajanjem većeg broja konačnih elemenata.

Matrica krutosti savijanja u opštem obliku:

$$k = \frac{EI}{l^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_i & \varphi_i & v_k & \varphi_k \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ sim. & & & 4l^2 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ v_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{array}$$

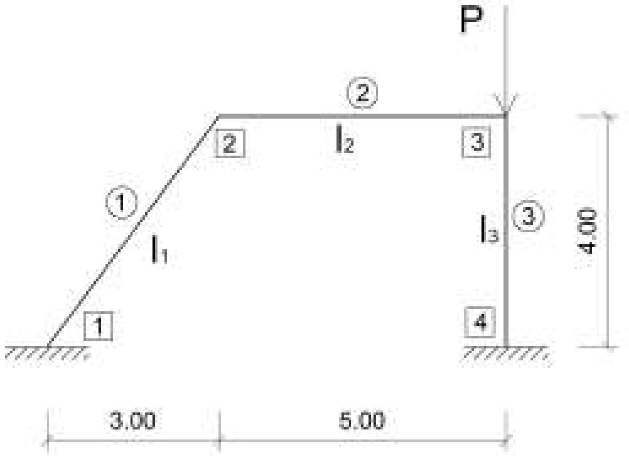
Geometrijska matrica krutosti u opštem obliku:

$$k_g = \frac{P}{10l} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_i & \varphi_i & v_k & \varphi_k \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 12 & l & -12 & l \\ & 4l^2/3 & -l & -l^2/3 \\ & & 12 & -l \\ sim. & & & 4l^2/3 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ v_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{array}$$

Dakle, matrica krutosti savijanja je funkcija geometrijskih i fizičkih karateristika sistema, dok je geometrijska matrica krutosti zavisna od dužine štapa i aksijalne sile *P*. Obe matrice su izvedene za štap tipa 'k', ali zbog opštosti razmatranja, primjenjive su i na ostale tipove štapova.

Primjer:

Za nosač na skici odrediti kritičnu vrijednost opterećenja *P*, a zatim porečno pomjeranje srednje tačke štapa 3 ako na sistem djeluje $P=0.8P_{kr}$ i poprečno raspodijeljeno opterećenje $p=10kN/m$ duž štapa 3.



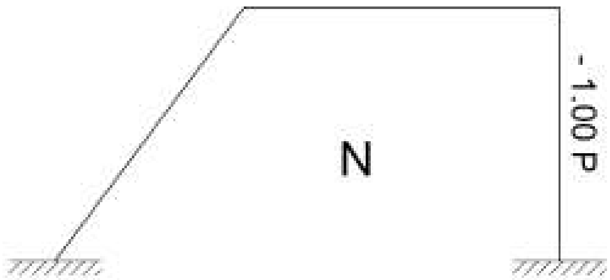
štap 1: HOP[1] 100 x 100 x 4 , $I_1 = 0.0000022133\,m^4$, $l_1 = 5\,m$

štap 2: HOP 150 x 150 x 4 , $I_2 = 0.0000079981\,m^4 = 3.61365 \cdot I_1$, $l_2 = 5\,m$

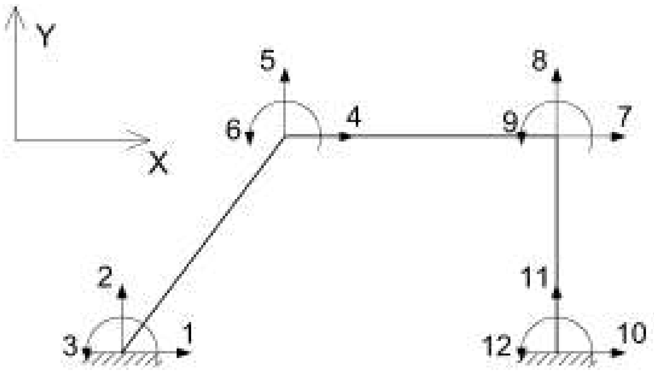
štap 3: HOP 130 x 130 x 4 , $I_3 = 0.0000051016\,m^4 = 2.30497 \cdot I_1$, $l_3 = 4\,m$

Obzirom da rešetka sistema može stajati u ravnoteži pod zadatim opterećenjem normalne sile određujemo iz rešetke sistema i dobijamo:

[1] Tip čeličnih kutijastih profila



Usvajamo nepoznata generalisana pomjeranja nosača po metodi konačnih elemenata, u globalnom koordinatnom sistemu:



Iz graničnih uslova:

$$1 = 2 = 3 = 10 = 11 = 12 = 0\ .$$

Pošto zanemarujemo izduženje ose štapa, imamo:

$$8 = 0 \quad i \quad 4 = 7\ .$$

Zaključujemo da postoje ukupno četiri nepoznata pomjeranja:

$$4 = 7 = u_2 = u_3,\ 5 = v_2\ \ ,6 = \varphi_2,\ 9 = \varphi_3\ .$$

Potrebno je ispitati da li su sva ova pomjeranja nezavisna.
Pažljivije posmatrajući sistem, uočićemo da su pomjeranja 4 i 5 međusobno zavisna (zbog zanemarivanja izduženja ose štapa), što ćemo pokazati i analitički.

Da bi formirali matricu krutosti sistema, prvo je potrebno formirati matrice krutosti svih štapova u njihovom lokalnom koordinatnom sistemu.

$$k_1 = \frac{EI_1}{5^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 12 & 6\cdot 5 & -12 & 6\cdot 5 \\ & 4\cdot 5^2 & -6\cdot 5 & 2\cdot 5^2 \\ & & 12 & -6\cdot 5 \\ sim. & & & 4\cdot 5^2 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{array}$$

$$k_1 = EI_1 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} \frac{12}{125} & \frac{6}{25} & \frac{-12}{125} & \frac{6}{125} \\ & \frac{4}{5} & \frac{-6}{25} & \frac{2}{5} \\ & & \frac{12}{125} & \frac{-6}{25} \\ sim. & & & \frac{4}{5} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{array}$$

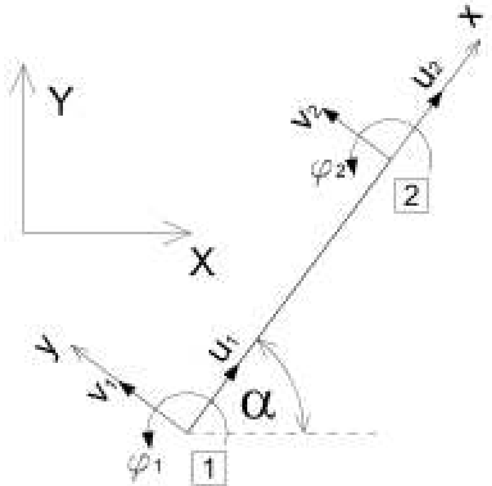
$$k_2 = \frac{EI_2}{5^3}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 8 & 9 \end{array} & \\ \left|\begin{array}{cccc} 12 & 6\cdot 5 & -12 & 6\cdot 5 \\ & 4\cdot 5^2 & -6\cdot 5 & 2\cdot 5^2 \\ & & 12 & -6\cdot 5 \\ sim. & & & 4\cdot 5^2 \end{array}\right| & \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

$$k_2 = 3.61365 EI_1 \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 8 & 9 \end{array} & \\ \left|\begin{array}{cccc} \frac{12}{125} & \frac{6}{25} & \frac{-12}{125} & \frac{6}{125} \\ & \frac{4}{5} & \frac{-6}{25} & \frac{2}{5} \\ & & \frac{12}{125} & \frac{-6}{25} \\ sim. & & & \frac{4}{5} \end{array}\right| & \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

$$k_3 = \frac{EI_3}{4^3}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 7 & 9 & 10 & 12 \end{array} & \\ \left|\begin{array}{cccc} 12 & 6\cdot 4 & -12 & 6\cdot 4 \\ & 4\cdot 4^2 & -6\cdot 4 & 2\cdot 4^2 \\ & & 12 & -6\cdot 4 \\ sim. & & & 4\cdot 4^2 \end{array}\right| & \begin{array}{c} 7 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{array} \end{array}$$

$$k_3 = 2.30497\, EI_1 \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 7 & 9 & 10 & 12 \end{array} & \\ \left|\begin{array}{cccc} \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & \frac{-3}{16} & \frac{3}{8} \\ & 1 & \frac{-3}{8} & \frac{1}{2} \\ & & \frac{3}{16} & \frac{-3}{8} \\ sim. & & & 1 \end{array}\right| & \begin{array}{c} 7 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{array} \end{array}$$

Sledeći korak je transformacija matrica krutosti iz lokalnog u globalni koordinatni sistem.



U opštem slučaju, transformacija generalisanih pomjeranja se vrši na sledeći način:

$$v_i = v_i^* \cdot \cos\alpha - u_i^* \cdot \sin\alpha$$

$$u_i = u_i^* \cdot \cos\alpha + v_i^* \cdot \sin\alpha$$

$$\varphi_i = \varphi_i^*$$

Sa * označavamo veličine izražene u globalnom koordinatnom sistemu.

Sada jednostavno dobijamo da veličine 5 i 4, tj. pomjeranja u dva nekolinearna pravca čvora 2, nisu nezavisne ako se štap 1 ne izdužuje. Horizontalno pomjeranje čvora 2 je:

$$u_2 = u_2^* \cdot \cos\alpha + v_2^* \cdot \sin\alpha$$

obzirom da je $u_2 = 0$ dobijamo

$$u_2^* = -v_2^* \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -v_2^* \cdot tg\alpha .$$

Dakle, posmatrani sistem ima samo 3 nezavisna pomjeranja: 5, 6 i 9, dok je $7 = -5 \cdot tg\alpha$.

Vratimo se na transformaciju matrice krutosti. Da bi transformisali matricu krutosti iz lokalnog u globalni koordinatni sistem potrebno je izvršiti transformaciju koordinata.
U opštem slučaju transformaciju koordinata vršimo množenjem matrice transformacije (T) sa vektorom pomjeranja u globalnom koordinatnom sistemu (q^*).

$$q = T \cdot q^*$$

$$\begin{vmatrix} v_i \\ u_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ u_k \\ \varphi_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_i^* \\ u_i^* \\ \varphi_i^* \\ v_k^* \\ u_k^* \\ \varphi_k^* \end{vmatrix}$$

Kada zanemarimo pomjeranja u pravcu ose štapa, vektor pomjeranja u lokalnom koordinatnom sistemu (q) i matrica transformacije gube po dva reda

$$\begin{vmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_i^* \\ u_i^* \\ \varphi_i^* \\ v_k^* \\ u_k^* \\ \varphi_k^* \end{vmatrix}$$

$$q = T \cdot q^* .$$

Globalnu matricu krutosti s-tog štapa (K_s^*) dobijamo kao:

$$K_s^* = T_s^T \cdot K_s \cdot T_s .$$

Ovo slijedi iz toga što je T ortogonalna matrica, tj, njena determinanta je jednaka jedinici a inverzna vrijednost njenoj transpoziciji. Tako, ispisujući izraz za vektor čvornih sila u lokalnom koordinatnom sistemu (R)

$$R = K \cdot q$$

dobijamo:

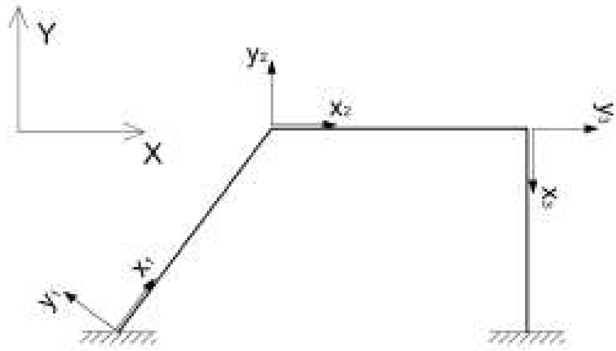
$$T \cdot R^* = K \cdot T \cdot q^*$$

$$T^T \cdot T \cdot R^* = T^T \cdot K \cdot T \cdot q^*$$

$$R^* = K^* \cdot q^*$$

Poslednjom jednačinom je izražena veza između čvornih sila i pomjeranja u globalnom koordinatnom sistemu; slijedi da je globalna matrica krutosti:

$$K^* = T^T \cdot K \cdot T .$$



Horizontalnim štapovima se lokalni koordinatni sistem poklapa sa globalnim. Što se tiče vertikalnih štapova, ako početak lokalnog koordinatnog sistema postavimo u čvor na gornjem kraju štapa i orijentišemo ga kao na slici, koordinate u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu su jednake. Dakle, samo trebamo izvršiti transformaciju matrice krutosti kosog štapa 1.

Za štap 1 smo zaključili da su pomjeranja $u_2^* \ i \ v_2^*$, a analogno i $u_1^* \ i \ v_1^*$, međusobno zavisna i to:

$$u_1^* = -v_1^* \cdot tg\alpha \qquad u_2^* = -v_2^* \cdot tg\alpha \,,$$

te tako pomjeranja iz globalnog u lokalni koordinatni sistem transformišemo kao:

$$v_1 = v_1^* \cdot \cos\alpha - u_1^* \cdot \sin\alpha = v_1^* \cdot \cos\alpha + v_1^* \cdot tg\alpha \cdot \sin\alpha = v_1^* \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = v_1^* \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$v_2 = v_2^* \cdot \cos\alpha - u_2^* \cdot \sin\alpha = v_2^* \cdot \cos\alpha + v_2^* \cdot tg\alpha \cdot \sin\alpha = v_2^* \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = v_2^* \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

Matrično zapisano:

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\cos\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1^* \\ u_1^* \\ \varphi_1^* \\ v_2^* \\ u_2^* \\ \varphi_2^* \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\cos\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1^* \\ \varphi_1^* \\ v_2^* \\ \varphi_2^* \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = T_1 q_1^*$$

Konačno, dobijamo matricu krutosti štapa 1 u globalnom koordinatnom sistemu:

$$k_1^* = T_1^T k_1 T \,, \quad \cos\alpha = 0.6$$

$$k_1^* = EI_1 \begin{vmatrix} \frac{1}{0.6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{12}{125} & \frac{6}{25} & \frac{-12}{125} & \frac{6}{125} \\ & \frac{4}{5} & \frac{-6}{25} & \frac{2}{5} \\ & & \frac{12}{125} & \frac{-6}{25} \\ sim. & & & \frac{4}{5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{0.6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ k_1^* = EI_1 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & 5 & 6 & \\
\end{array}$$

$$k_1^* = EI_1 \begin{vmatrix} 0.26666 & 0.4 & -0.26666 & 0.4 \\ & 0.8 & -0.4 & 0.4 \\ & & 0.26666 & -0.4 \\ sim. & & & 0.8 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Također, pošto u se matrici krutosti štapa 3 pojavljuje generalisano pomjeranje 5, potrebno je izvršiti i transformaciju matrice krutosti ovog štapa. Postupak je sličan kao prethodno izloženi. Prvo određujemo matricu transformacije, koja u ovom slučaju služi samo da predstavi pomjeranje 7 kao funkciju pomjeranja 5:

$$\begin{vmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -tg\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{vmatrix}$$

Tako dobijamo matricu krutosti štapa 3 u kome figuriše nepoznata 5 ($tg\alpha=4/3$):

$$K_3^* = (2.30497\, EI_1) \cdot \begin{vmatrix} -tg\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & \frac{-3}{16} & \frac{3}{8} \\ & 1 & \frac{-3}{8} & \frac{1}{2} \\ & & \frac{3}{16} & \frac{-3}{8} \\ sim. & & & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -tg\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 5 & 9 & 10 & 12 \end{array}$$

$$K_3^* = EI_1 \begin{vmatrix} 0.76832 & -1.15249 & 0.576244 & -1.15249 \\ -1.15249 & 2.30497 & -0.864365 & 1.15249 \\ 0.576244 & -0.864365 & 0.432183 & -0.864365 \\ -1.15249 & 1.15249 & -0.864365 & 2.30497 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 5 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{array}$$

Matricu krutosti sistema, tj. njenu submatricu u kojoj se pojavljuju tri nepoznata pomjeranja 5, 6 i 9, dobijamo sabiranjem odgovarajućih elemenata matrica krutosti štapova:

$$\begin{array}{ccc} 5 & 6 & 9 \end{array}$$

$$K^* = EI_1 \begin{vmatrix} 0.26666 + 3.61365\frac{12}{125} + 0.76832 & -0.4 + 3.61365\frac{6}{25} & 3.61365\frac{6}{125} - 1.15249 \\ & 0.8 + 3.61365\frac{4}{5} & 3.61365\frac{2}{5} \\ sym & & 3.61365\frac{4}{5} + 2.30497 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 5 & 6 & 9 \end{array}$$

$$K^* = EI_1 \begin{vmatrix} 1.38189 & 0.467276 & -0.97903 \\ & 3.69092 & 1.44546 \\ sym & & 5.19589 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 9 \end{array}$$

Sada određujemo geometrijsku matricu krutosti. Obzirom da je jedino štap 3 aksijalno opterećen, samo za njega formiramo geometrijsku matricu krutosti

$$k_{g3}=\frac{P}{10\cdot 4}\begin{vmatrix} 12 & 4 & -12 & 4 \\ & \frac{4\cdot 4^2}{3} & -4 & -\frac{4^2}{3} \\ & & 12 & -4 \\ sim. & & & \frac{4\cdot 4^2}{3} \end{vmatrix}=P\begin{vmatrix} 3/10 & 1/10 & -3/10 & 1/10 \\ & 8/15 & -1/10 & -2/15 \\ & & 3/10 & -1/10 \\ sim. & & & 8/15 \end{vmatrix}$$

Potrebno je izvršiti prelazak sa nepoznate 7 na 5, što činimo analogno prethodno prikazanom postupku

$$k_{g3}=\begin{vmatrix} -tg\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3/10 & 1/10 & -3/10 & 1/10 \\ & 8/15 & -1/10 & -2/15 \\ & & 3/10 & -1/10 \\ sim. & & & 8/15 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -tg\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 5 & 9 & 10 & 12 \end{array} \\ k_{g3}^{*}=P & \begin{vmatrix} 8/15 & -2/15 & -2/5 & -2/15 \\ -2/15 & 8/15 & -1/10 & -2/15 \\ -2/5 & -1/10 & 3/10 & -1/10 \\ -2/15 & -2/15 & -1/10 & 8/15 \end{vmatrix}\begin{array}{c} 5 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{array} \end{array}$$

Dobili smo geometrijsku matricu krutosti sistema, te je njena submatrica koja nam je potrebna:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 9 \end{array} \\ K_{g}^{*}=P & \begin{vmatrix} 8/15 & 0 & -2/15 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2/15 & 0 & 8/15 \end{vmatrix}\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Iz uslova:

$$(K^{*}-K_{g}^{*})\cdot q=0 \;\Rightarrow \det(K^{*}-K_{g}^{*})=0$$

dobijamo kritičnu silu nosača:

$$\det\begin{vmatrix} EI_1\cdot 1.38189\text{-}8P/15 & EI_1\cdot 0.467276\text{-}0 & -EI_1\cdot 0.97903+2P/15 \\ & EI_1\cdot 3.69092\text{-}0 & EI_1\cdot 1.44546\text{-}0 \\ sym & & EI_1\cdot 5.19589\text{-}8P/15 \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow P_{kr}=912.83\,kN$$

Primjena tačnih interpolacionih funkcija

Matrica krutosti u opštem obliku je:

$$K^{*}=\frac{EI}{l^3\Delta}\begin{vmatrix} \omega^3\sin\omega & l(\omega^2-\omega^2\cos\omega) & -\omega^3\sin\omega & l(\omega^2-\omega^2\cos\omega) \\ & l^2\omega(\sin\omega-\omega\cos\omega) & -l(\omega^2-\omega^2\cos\omega) & l(\omega^2-\omega\sin\omega) \\ & & \omega^3\sin\omega & -l(\omega^2-\omega^2\cos\omega) \\ sim. & & & l^2\omega(\sin\omega-\omega\cos\omega) \end{vmatrix}$$

Pri čemu su: $\Delta = 2(1-\cos\omega) - \omega\sin\omega$ i $\omega = l\sqrt{\dfrac{P}{EI}}$.

Matrice krutosti savijanja štapova 1 i 2 ostaju iste, dok samo formiramo novu matricu krutosti štapa 3 (K_3^*) jer je on aksijalno opterećen. Potrebno je u matrici krutosti štapa 3 izvršiti prelazak sa nepoznate 7 na nepoznatu 5 prema već opisanom postupku.

Nakon toga, formiramo matricu krutosti sistema u kojoj figurišu samo elementi vezani za nepoznata generalisana pomjeranja:

$$K^* = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 9 & \\ \hline EI_1(0.26666+3.61365\cdot\frac{12}{125})+K^*_{3,55} & EI_1(-0.4+3.61365\cdot\frac{6}{25}) & EI_1(3.61365\cdot\frac{6}{125})+K^*_{3,95} & 5 \\ & EI_1(0.8+3.61365\cdot\frac{4}{5}) & EI_1(3.61365\cdot\frac{2}{5}) & 6 \\ sym & & EI_1(3.61365\cdot\frac{4}{5})+K^*_{3,99} & 9 \end{array}$$

$$K^*_{3,55} = \frac{28.34222\omega^3 \sin\omega}{\Delta}$$

$$K^*_{3,95} = \frac{-85.02666(\omega^2 - \omega^2\cos\omega)}{\Delta}$$

$$K^*_{3,99} = \frac{255.08\omega(\sin\omega - \omega\cos\omega)}{\Delta}$$

Zatim, postavljajući uslov

$$\det K^* = 0,$$

dobijamo tačnu vrijednost kritične sile:

$$P_{kr} = 891.8696\,kN.$$

Napomena:

Približna metoda deformacije po teoriji drugog reda daje istu vrijednost kao i postupak sa tačnim interpolacionim funkcijama: $\omega_{kr} = 3.739749 \Rightarrow P_{kr} = 891.87\,kN$.

Greška u postupku sa geometrijskom matricom krutosti je 2.35 %. Ova greška, koja se javlja zbog usvajanja kubnog polinoma kao interpolacione funkcije pomjeranja, se može smanjiti usvajanjem većeg broja konačnih elemenata.

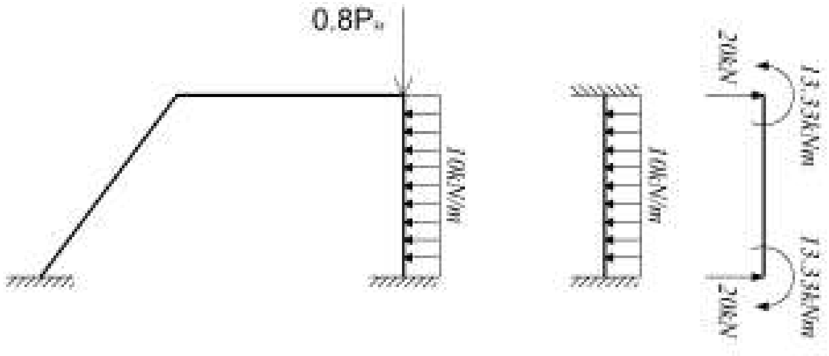
Određivanje uticaja metodom konačnih elemenata:

Sada za zadatu vrijednost sile *P = 0.8 P_{kr} = 713.496 kN,* određujemo matricu krutosti $\left(K^* - K_g^*\right)$:

$$\left(K^* - K_g^*\right) = \begin{vmatrix} EI_1\cdot 1.38189\text{-}8\cdot 713.496/15 & EI_1\cdot 0.467276\text{-}0 & \text{-}EI_1\cdot 0.97903\text{+}2\cdot 713.496/15 \\ & EI_1\cdot 3.69092\text{-}0 & 0 \\ sim. & & EI_1\cdot 5.19589\text{-}8\cdot 713.496/15 \end{vmatrix}$$

$$\left(K^* - K_g^*\right) = \begin{vmatrix} 231.176 & 206.844 & -338.247 \\ & 1633.82 & 639.847 \\ sim. & & 1919.48 \end{vmatrix} [kN/m]$$

Vektor čvornih sila konačnog elementa je jednak negativnim vrijednostima reakcija oslonaca odgovarajuće oslonjenog štapa.
Kada na štap 3 djeluje poprečno opterećenje *p=10kN/m* tada je vektor čvornih sila štapa 3:



$$
\begin{array}{ccccc}
 & 7 & 9 & 10 & 12 \\
R_3^T = [& -20 & -13.33 & -20 & 13.33]
\end{array}
$$

Kao i svaki put dosad, moramo izvršiti transformaciju ovog vektora da bi prešli sa nepoznate 7 na 5.

$$
R_3 = \begin{vmatrix} -20/-tg\alpha \\ -13.33 \\ -20 \\ 13.33 \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c} 15 & 5 \\ -13.33 & 9 \\ -20 & 10 \\ 13.33 & 12 \end{array}.
$$

Vektor čvornih sila sistema je:

$$
R^* = \begin{array}{|c|c} 15 & 5 \\ 0 & 6 \\ -13.33 & 9 \end{array}
$$

Nepoznata pomjernja određujemo rješavanjem uslovne jednačine:

$$
(K^* - K_g^*) \cdot q^* = R^* \quad \Rightarrow q^* = (K^* - K_g^*)^{-1} \cdot R^*
$$

iz čega dobijamo:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 5 & 6 & 9 \\
q^{*T} = [& 0.11689 & -0.02317 & 0.02137]
\end{array}
$$

Da bi odredili pomjeranje srednje tačke štapa, potrebno je izvršiti interpolaciju pomjeranja na štapu 3 prema izrazu

$$
v_3(x) = A \cdot \alpha_3 = A \cdot C^{-1} \cdot q_3 = N \cdot q_3 .
$$

Tako, za štap 3, vektor generalisanih pomjeranja je:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 7 & 9 & 10 & 12 & & & & & \\
q_3^T = [& 0.11689 \cdot (-\frac{4}{3}) & 0.02137 & 0 & 0] = [& -0.15585 & 0.02137 & 0 & 0 &]
\end{array}
$$

pri čemu smo pomjeranje 5 transformisali u 7 kao i u prethodnim slučajevima.
Konačno, pomjeranje srednje tačke štapa 3 je:

$$
v_3(2) = N \cdot q_3 = -0.06724\, m \simeq -6.7\, cm .
$$

Napomena:

Metoda konačnih elemenata kao izlazne podatke daje obrtanja i pomjeranja usvojenih čvorova, te ako tražimo pomjeranje neke tačke koja nije čvor moramo primijeniti interpolaciju pomjeranja.

Približna metoda deformacije po linearizovanoj teoriji II reda kao izlazne podatke daje obrtanja čvorova i parametre pomjeranja. Pomoću parametara pomjeranja i usvojene rešetke sistema jednostavno dobijamo pomjeranja svih čvornih tačaka nosača. Ako se traži pomjeranje neke tačke koja nije čvor nosača, primjenjujemo metodu početnih parametara.

Proračun pomjeranja prema približnoj metodi deformacija:

Za zadatu silu

$$P=0.8P_{kr} \;\Rightarrow\; \omega = 3.344933\,.$$

određujemo matricu krutosti. Zatim računamo gotske momente:

$$\mathfrak{M}_{34} = -\mathfrak{M}_{43} = \gamma(\omega)\frac{pl^2}{12} = \text{-}1.25553\frac{10\cdot 16}{12} = -16.7403\,kNm\,,$$

i slobodne članove:

$$A_{10} = 0$$
$$A_{20} = \mathfrak{M}_{34} = -16.7403$$
$$C_{10} = -[-1\cdot 2\cdot(10\cdot 4)] = 80$$

Rješavanjem uslovnih jednačina dobijamo:

$$\varphi_1 = 0.016089 \qquad \varphi_2 = 0.001878 \qquad \Delta_1 = -0.044298\,.$$

Trebaju nam početni parametri u čvoru 3 štapa 3 (po PMD smo taj čvor obilježili sa 2):

$$v_3 = -1\cdot 4\cdot(-0.044298) = 0.17719$$
$$\varphi_3 = \varphi_2^{\;PMD} = 0.001878$$
$$M_{34} = \varphi_3\cdot a_{34} + \Delta_1\cdot\psi_{34,1}\cdot c_{34} + \mathfrak{M}_{34} = \text{-}74.1279$$

Da bi odredili vertikalnu silu u čvoru 3 štapa 34, potreban nam je i momenat na donjem kraju štapa:

$$M_{43} = \varphi_3\cdot b_{43} + \Delta_1\cdot\psi_{43,1}\cdot c_{43} + \mathfrak{M}_{43} = \text{-}49.4735$$

te dobijamo

$$V_3 = T_{34} = \frac{74.1279 + 49.4735}{4} + \frac{10\cdot 4}{2} = 50.9\,.$$

Sada je poprečno pomjeranje srednje tačke štapa 3:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0\frac{\sin kx}{k} - M_0\frac{1-\cos kx}{S} - V_0\frac{kx - \sin kx}{kS} + \frac{p}{k^2 S}(\cos kx - 1 + \frac{k^2x^2}{2})$$

$$v(2) = 0.242m = 24.2cm\,.$$

Napomena: Pomjeranja dobijena primjenom oba postupka su, posmatrajući nosač, ulijevo. Razlika u predznacima je posljedica usvojenih konvencija.
PMD daje pomjeranje 3.6 puta veće od MKE. Razlog za to je tačnost metode konačnih parametara u odnosu na aproksimaciju pomjeranja u MKE sa kubnim polinomom.