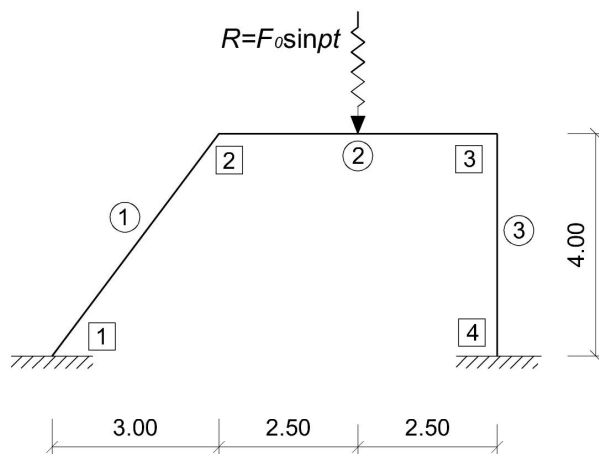
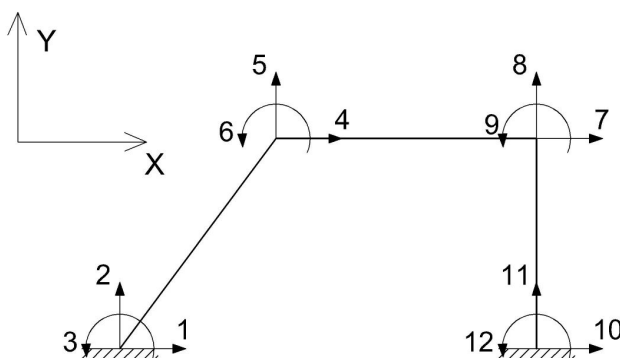


Primjer:

Za isti nosač kao i u zadatku iz stabilnosti konstrukcija potrebno je odrediti odgovor konstrukcije usljed dejstva dinamičkog opterećenja $R = F_0 \cdot \sin pt$, pri čemu je $F_0 = 100kN$ i $p = \frac{2}{3} \omega_1$.



Nepoznate ćemo usvojiti kao prilikom rješavanja stabilnosti:



Tako da nam je poznata matrica krutosti sistema:

$$K^* = EI_1 \begin{array}{ccc|c} & 5 & 6 & 9 \\ \hline 1.38189 & 0.467276 & -0.97903 & 5 \\ & 3.69092 & 1.44546 & 6 \\ \text{sym} & & 5.19589 & 9 \end{array}$$

Za razliku od dosad primijenjenog direktnog koncentrisanja masa, u MKE se uvodi pojam *konzistentne matrice masa*, koja predstavlja masu konstrukcije 'razmazanu' po stepenima slobode i u opštem obliku glasi:

$$M = \frac{\rho l}{420} \begin{array}{cccc|c} 156 & 22l & 54 & -13l & \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 & \\ & & 156 & -22l & \\ \text{sim.} & & & 4l^2 & \end{array}$$

gdje je ρ raspodijeljena masa posmatranog elementa u kg/m ili t/m

$$\rho_1 = 0.0117507 \text{ t/m}$$

$$\rho_2 = 0.0180387 \text{ t/m}$$

$$\rho_3 = 0.0155235 \text{ t/m}$$

Analogno izvođenju matrice krutosti, konzistentne matrice masa štapova prvo ispisujemo u lokalnom koordinatnom sistemu:

$$M_1 = \frac{\rho_1 l_1}{420} \begin{vmatrix} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 \\ 156 & 22 \cdot 5 & 54 & -13 \cdot 5 \\ & 4 \cdot 5^2 & 13 \cdot 5 & -3 \cdot 5^2 \\ & & 156 & -22 \cdot 5 \\ sim. & & & 4 \cdot 5^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} \quad M_1 = \begin{vmatrix} 0.0218227 & 0.0153878 & 0.00755402 & -0.0090928 \\ & 0.0139889 & 0.0090928 & -0.0104917 \\ & & 0.0218227 & -0.0153878 \\ sim. & & & 0.0139889 \end{vmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} [t]$$

$$M_2 = \frac{\rho_2 l_2}{420} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 & 9 \\ 156 & 22 \cdot 5 & 54 & -13 \cdot 5 \\ & 4 \cdot 5^2 & 13 \cdot 5 & -3 \cdot 5^2 \\ & & 156 & -22 \cdot 5 \\ sim. & & & 4 \cdot 5^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \quad M_2 = \begin{vmatrix} 0.0335004 & 0.0236221 & 0.0115963 & -0.0139585 \\ & 0.0214746 & 0.0139585 & -0.016106 \\ & & 0.0335004 & -0.0236221 \\ sim. & & & 0.0214746 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} [t]$$

$$M_3 = \frac{\rho_3 l_3}{420} \begin{vmatrix} 7 & 9 & 10 & 12 \\ 156 & 22 \cdot 5 & 54 & -13 \cdot 5 \\ & 4 \cdot 5^2 & 13 \cdot 5 & -3 \cdot 5^2 \\ & & 156 & -22 \cdot 5 \\ sim. & & & 4 \cdot 5^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{matrix} \quad M_3 = \begin{vmatrix} 0.0230635 & 0.0130102 & 0.00798351 & -0.00768783 \\ & 0.00946194 & 0.00768783 & -0.00709646 \\ & & 0.0230635 & -0.0130102 \\ sim. & & & 0.00946194 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \end{matrix} [t]$$

Sada moramo izvršiti transformaciju matrice masa kosog štapa 1 iz lokalnog u globalni koordinatni sistem:

$$M_1^* = \begin{vmatrix} \frac{1}{0.6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0.0218227 & 0.0153878 & 0.00755402 & -0.0090928 \\ & 0.0139889 & 0.0090928 & -0.0104917 \\ & & 0.0218227 & -0.0153878 \\ sim. & & & 0.0139889 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{0.6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

i dobijamo:

$$M_1^* = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0.0606187 & 0.0256464 & 0.0209834 & -0.0151547 \\ & 0.0139889 & 0.0151547 & -0.0104917 \\ & & 0.0606187 & -0.0256464 \\ sim. & & & 0.0139889 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Također u matrici masa štapa 3, potrebno je preći sa nepoznate 7 na usvojenu nepoznatu sistema 5:

$$M_3^* = \begin{vmatrix} -tg\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0.0230635 & 0.0130102 & 0.00798351 & -0.00768783 \\ & 0.00946194 & 0.00768783 & -0.00709646 \\ & & 0.0230635 & -0.0130102 \\ sim. & & & 0.00946194 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -tg\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_3^* = \begin{array}{cccc|c} & 5 & 9 & 10 & 12 & \\ \hline & 0.0410018 & -0.0173469 & -0.0106447 & 0.0102504 & 5 \\ & & 0.00946194 & 0.00768783 & -0.00709646 & 9 \\ & & & 0.0230635 & -0.0130102 & 10 \\ & sim. & & & 0.00946194 & 12 \end{array}$$

Konačno, formiramo konzistentnu matricu masa sistema sabirajući odgovarajuće elemente:

$$M = \begin{array}{ccc|c} & 5 & 6 & 9 & \\ \hline & 0.0606187+0.0335004+0.0410018 & -0.0256464+0.0236221 & -0.0139585-0.0173469 & 5 \\ & & 0.0139889+0.0214746 & -0.016106 & 6 \\ & sim & & 0.0214746+0.00946194 & 9 \end{array}$$

$$M = \begin{array}{ccc|c} & 5 & 6 & 9 & \\ \hline & 0.1351209 & -0.0020243 & -0.0313054 & 5 \\ & & 0.0354635 & -0.016106 & 6 [t] \\ & sim. & & 0.03093654 & 9 \end{array}$$

Sada postavljamo jednačinu slobodnih neprigušenih oscilacija:

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

i rješavamo svojstveni problem:

$$\left(K^{-1}M - \frac{1}{\omega^2}I \right) u = 0,$$

te dobijamo svojstvene frekvencije i svojstvene vektore oscilovanja posmatranog sistema:

$$\omega_1 = 60.0202 \text{ rad / s}$$

$$\omega_2 = 159.651 \text{ rad / s}$$

$$\omega_3 = 467.148 \text{ rad / s}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2.80018 \\ 0.00648 \\ 1.77274 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0.69019 \\ 3.70398 \\ 5.26902 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} -0.63028 \\ -2.57553 \\ 7.46617 \end{bmatrix}$$

Da bi primijenili modalnu superpoziciju, potrebno je izvršiti normalizaciju modalne matrice u odnosu na matricu masa. To činimo računajući skalarni faktor:

$$v_n^T \cdot M \cdot v_n = \hat{M}_n$$

gdje v_n predstavlja proizvoljan vektor pomjeranja. Zatim, izražavajući normalizovane modalne oblike, ϕ_n , kao

$$\phi_n = v_n \cdot \hat{M}_n^{-1/2}$$

dobijamo normalizovanu modalnu matricu, tj. važi

$$\Phi^T \cdot M \cdot \Phi = I \quad \text{i} \quad \Phi^T \cdot K \cdot \Phi = \omega^2,$$

gdje je I jedinična matrica a ω^2 matrica kojoj su na glavnoj dijagonali kvadrati sopstvenih kružnih frekvencija a ostali članovi nula.

Vektor čvornih sila konačnog elementa je jednak negativnim vrijednostima reakcija oslonaca odgovarajuće oslonjenog štapa. Obzirom da sila djeluje samo na štapu 2, dovoljno je odrediti samo njegov vektor čvornih sila:

$$R_2 = \sin(pt) \cdot \begin{bmatrix} -F_0/2 \\ -F_0 \cdot 5/8 \\ -F_0/2 \\ F_0 \cdot 5/8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

pa je vektor čvornih sila sistema

$$R = \sin(pt) \cdot \begin{bmatrix} -F_0/2 \\ -F_0 \cdot 5/8 \\ F_0 \cdot 5/8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{matrix}$$

Sada prelazimo na normalne koordinate:

$$M\ddot{u} + Ku = R$$

$$u = \Phi y \quad \ddot{u} = \Phi \ddot{y}$$

$$\Phi^T \cdot [M\Phi \ddot{y} + K\Phi y] = R$$

$$\Phi^T M \Phi \ddot{y} + \Phi^T K \Phi y = \Phi^T R$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \Phi^T R$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \Phi^T \cdot F_0 \cdot \sin pt$$

te sada trebamo riješiti tri nezavisne diferencijalne jednačine kretanja sa po jednom nepoznatom.

Poznato rješenje neprigušenih oscilacija sa harmonijskom pobudom glasi:

$$y = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\eta^2} \cdot \sin pt.$$

Ovo rješenje je dato za standardnu diferencijalnu jednačinu kretanja:

$$m\ddot{y} + ky = P_0 \cdot \sin pt,$$

u kojoj je, nakon prelaska na normalne koordinate:

$$m = 1, \quad k = \omega^2, \quad P_0 = \Phi^T \cdot F_0.$$

Jedino što nam je preostalo odrediti jeste P_0 :

$$P_0 = \Phi^T \cdot F_0 = \begin{bmatrix} 0.574794 \cdot F_0 \\ -3.92793 \cdot F_0 \\ 0.486848 \cdot F_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{matrix}$$

Kružna frekvencija poremećajne sile je $p = \frac{2}{3} \omega_1 \approx 40 \text{ rad} / \text{s}$.

Sada rješavamo dobijene nezavisne diferencijalne jednačine kretanja sa po jednom nepoznatom:

$$y_1 = \frac{0.574794 \cdot F_0}{\omega_1^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2} \cdot \sin pt = 0.000287048 \cdot F_0 \cdot \sin(40 \cdot t)$$

$$y_2 = \frac{-3.92793 \cdot F_0}{\omega_2^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_2}\right)^2} \cdot \sin pt = -0.000164428 \cdot F_0 \cdot \sin(40 \cdot t)$$

$$y_3 = \frac{0.486848 \cdot F_0}{\omega_3^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_3}\right)^2} \cdot \sin pt = 0.0000022474 \cdot F_0 \cdot \sin(40 \cdot t).$$

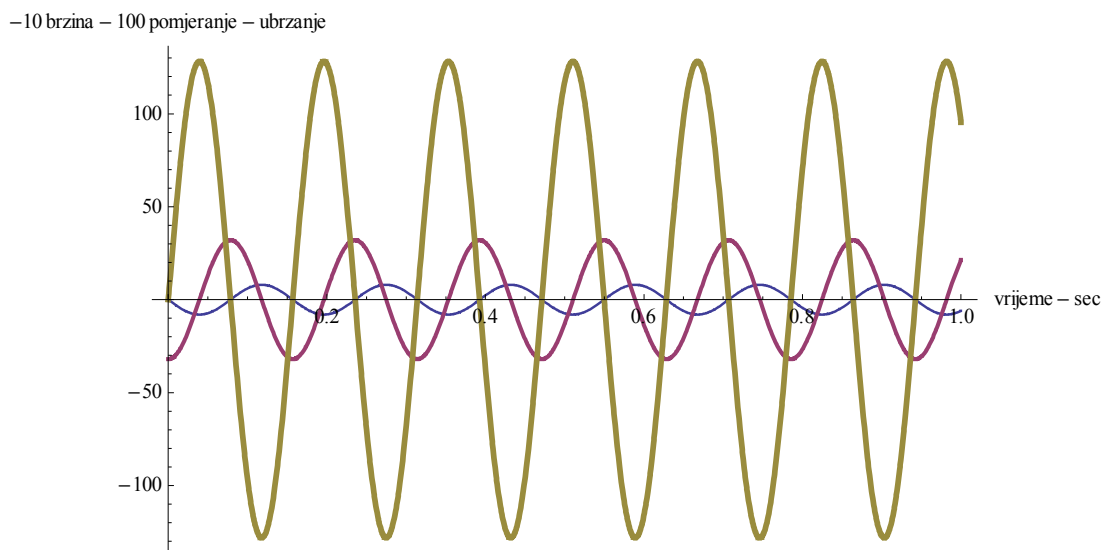
Nakon što poznajemo vektor nepoznatih pomjeranja u normalnim koordinatama $y^T = [y_1 \ y_2 \ y_3]$, primjenom modalne superpozicije dobijamo nepoznata pomjeranja u stvarnim koordinatama:

$$u = \Phi y = \begin{bmatrix} -0.000800868 \cdot F_0 \cdot \sin(40 \cdot t) \\ -0.000399078 \cdot F_0 \cdot \sin(40 \cdot t) \\ 0.000259349 \cdot F_0 \cdot \sin(40 \cdot t) \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{matrix}$$

Ovim je problem riješen. U dinamici konstrukcija (kao i u statici) je primarno naći generalisana pomjeranja konstrukcije, dok se sve ostale veličine dobijaju iz nje. Tako su brzina i ubrzanje:

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} -0.0320347 \cdot F_0 \cdot \cos(40 \cdot t) \\ -0.0159631 \cdot F_0 \cdot \cos(40 \cdot t) \\ 0.0103739 \cdot F_0 \cdot \cos(40 \cdot t) \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{matrix} \quad \ddot{u} = \begin{bmatrix} 1.28139 \cdot F_0 \cdot \sin(40 \cdot t) \\ 0.638524 \cdot F_0 \cdot \sin(40 \cdot t) \\ -0.414958 \cdot F_0 \cdot \sin(40 \cdot t) \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{matrix}$$

Prikažemo vertikalno pomjeranje, brzinu i ubrzanje čvora 2 (generalisano pomjeranje 5):



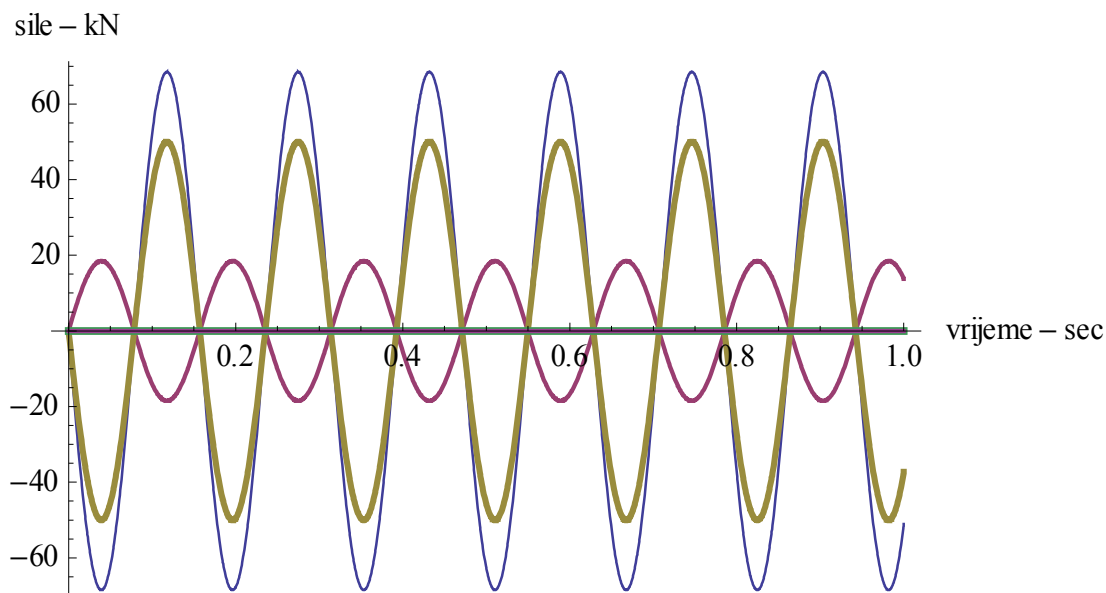
Slika – pomjeranje (pomnoženo sa 100, radi razmjere) je predstavljeno najtanjom linijom, brzina (pomnožena sa 10, radi razmjere) je prikazana linijom srednje debljine dok je ubrzanje dato u stvarnoj razmjeri i to najdebljom linijom. Jedinice su, redom: m , m/s i m/s^2 .

Sa slike vidimo da je, očekivano, pri amplitudnom pomjeranju brzina nula a ubrzanje maksimalno, dok pri prolasku kroz ravnotežni položaj brzina dostiže amplitudnu vrijednost a ubrzanje je nula.

Što se tiče sila, na svaku masu djeluje:

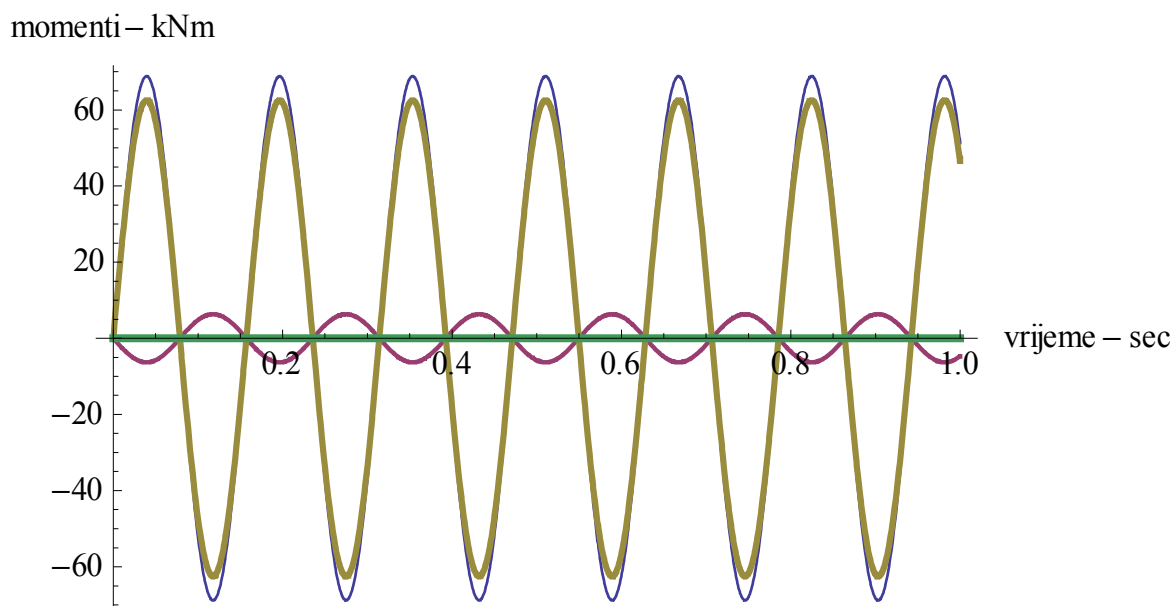
- inercijalna sila: $I = M \cdot \ddot{u}$
- elastična (restituciona) sila: $E = K \cdot u$
- poremećajna sila: $R = F_0 \cdot \sin pt$.

Na sledećoj slici su prikazane sile koje se javljaju u pravcu generalisanog pomjeranja 5 (T_{23}):



Slika – sile u pravcu pomjeranja 5 (T_{23}) – elastična sila je prikazana najtanjom linijom, inercijalna linijom srednje debljine, dok je poremećajna sila prikazana najdebljom linijom. Zbir (koji je nula u svakom trenutku) je prikazan linijom preko apscise.

Momenti savijanja koji djeluju u pravcu obrtanja 9 (M_{32}) su prikazani na sledećoj slici:



Slika – momenti u pravcu obrtanja 9 (M_{32}) – elastični momentat je prikazan najtanjom linijom, inercijalni linijom srednje debljine, dok je poremećajni moment prikazan najdebljom linijom. Zbir (koji je nula u svakom trenutku) je prikazan linijom preko apscise.

Sa poslednje dvije slike je očigledno da je inercijalna sila koja nastaje usljed obrtanja mase značajno manja od one koja nastaje usljed translacije. Kod pomjeranja 5, odnos elastična/inercijalna sila je oko -3.7, dok je prilikom obrtanja 9 odnos elastični/inercijalni moment savijanja oko -10.88. Ovaj odnos je još izraženiji kod obrtanja 6 i iznosi -24.38.