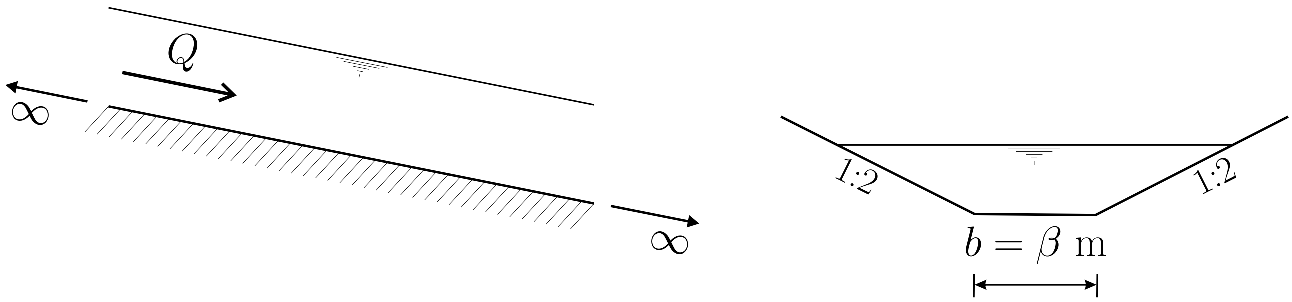
Задатак 3.1 — *Прорачун нормалне и критичне дубине*

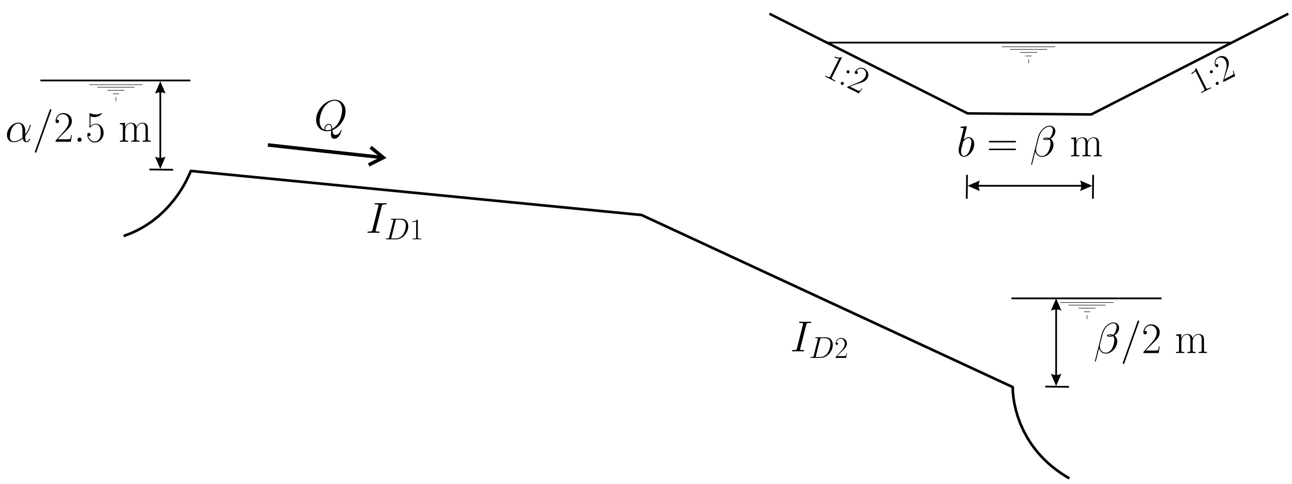
Бесконачно дугачким каналом трапезног попречног пресека, протиче $Q = 5\alpha$ m^3/s воде. Манингов коефицијент за облогу канала је $n = 0.016$ m$^{-1/3}$s. Одредити нормалну и критичну дубину за случај да је нагиб дна канала $I_{D1} = 0.001$ и $I_{D2} = 0.01$.



Задатак 3.2 — *Скицирање линије нивоа*

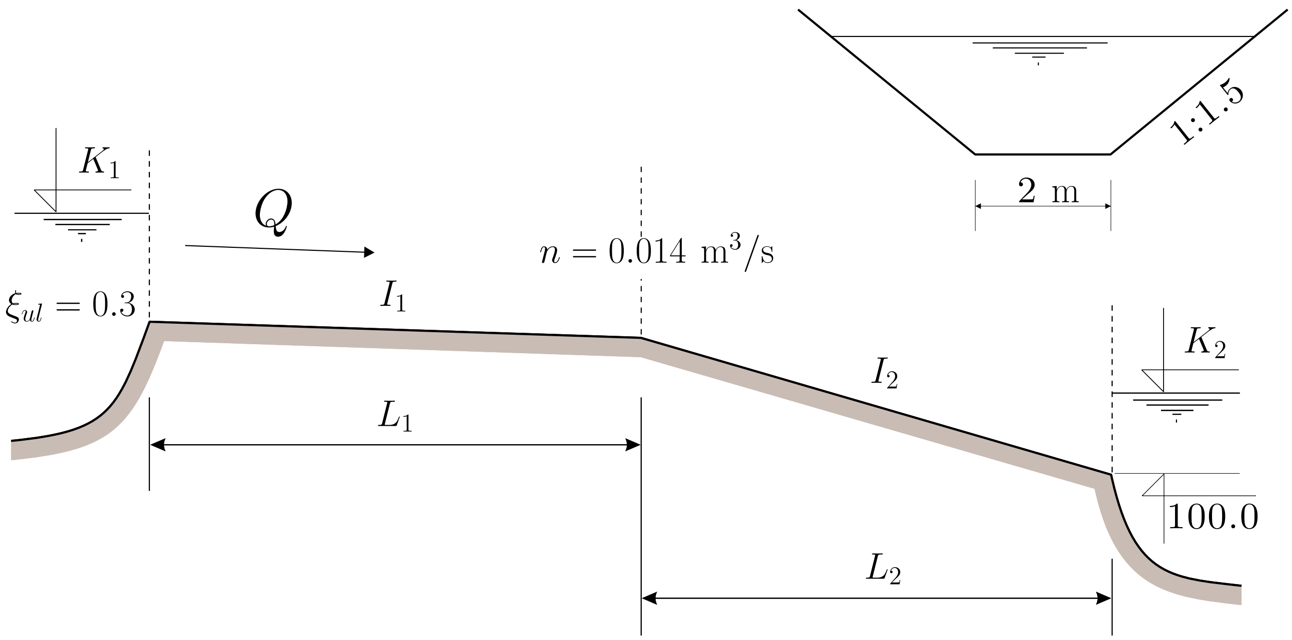
На скици је приказан канал који се састоји од две деонице различитих нагиба. Манингов коефицијент је исти за обе деонице и износи $n = 0.018$ m$^{-1/3}$s. Скицирати облик линије нивоа и означити смер прорачуна за случај да су нагиби деоница дна канала:

1. $I_{D1} = \frac{\alpha}{20}\%$, $I_{D2} = \frac{\beta}{3}\%$;
2. $I_{D1} = \frac{\beta}{3}\%$, $I_{D2} = \frac{\alpha}{20}\%$.



Домаћи 3	*Линија нивоа*

Каналом трапезног попречног пресека, који спаја два језера, тече у устаљеном режиму $2.2\alpha + 1.8\beta$ m^3/s. Кота нивоа воде у низводном језеру је $K_2 = 100.00 + 0.5\beta$ m. Коефицијент локалног губитка енергије на улазу у канал је $\xi_{ul} = 0.3$. Манингов коефицијент храпавости за канал има вредност $n = 0.014$ m$^{-1/3}$s.



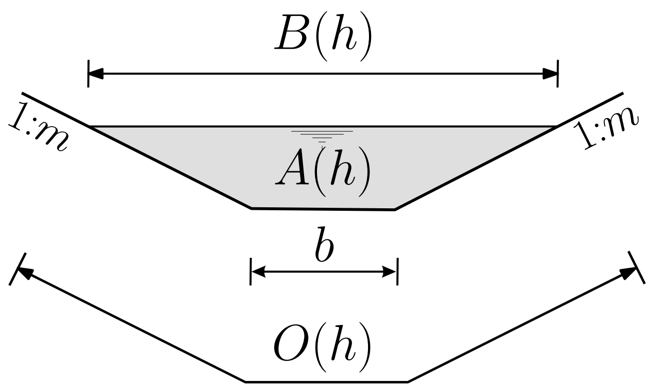
1	**2**
$I_1 = 2\%$ $L_1 = 250$ m $I_2 = 0.1\%$ $L_2 = 1500$ m	$I_1 = 0.1\%$ $L_1 = 1500$ m $I_2 = 2\%$ $L_2 = 250$ m

Нацртати у размери линију нивоа и линију енергије. Срачунати коту воде у узводном језеру ($K_1 = ?$).

Објашњења задатака

Задатак 3.1

Геометријске карактеристике трапезног попречног пресека:



Ознаке у једначинама

Ширина воденог огледала:

$$B(h) = b + 2\,m\,h \tag{1}$$

Површина попречног пресека:

$$A(h) = h\,\big(b + m\,h\big) \tag{2}$$

Оквашени обим:

$$O(h) = b + 2\,h\,\sqrt{1+m^2} \tag{3}$$

Хидраулички радијус:

$$R(h) = \frac{A(h)}{O(h)} \tag{4}$$

Прорачун нормалне дубине:

Нормална дубина (ознака је h_N) је дубина која се јавља при једноликом течењу. Ова дубина се може израчунати помоћу Шези–Манингове једначине[1]:

$$Q = \frac{1}{n}\,A_N\,R_N^{2/3}\,\sqrt{I_D}, \tag{5}$$

при чему су: $A_N = A(h_N)$ и $R_N = R(h_N)$. Може се показати да се решење ове једначине не може израчунати аналитички чак ни у случају најједноставнијих облика попречног пресека. Решење овог проблема ћемо тражити применом Њутнове методе:

$$\begin{aligned}
A_{N,i} &= b\,h_{N,i} + m\,h_{N,i}^2 && (6)\\
O_{N.i} &= b + 2\,h_{N,i}\sqrt{1+m^2} && (7)\\
F(h_{N,i}) &= \frac{n\,Q}{\sqrt{I_D}} - A_{N,i}\,R_{N,i}^{2/3} && (8)\\
F'(h_N) &= -\frac{2}{3}\frac{A_{N.i}^{2/3}\left(\frac{5}{2}(b+2\,m\,h_{N,i})O_{N.i} - 2\,A_{N.i}\sqrt{1+m^2}\right)}{O_{N.i}^{5/3}} && (9)\\
h_{N,i+1} &= h_{N,i} - \frac{F(h_{N,i})}{F'(h_N)} && (10)\\
\varepsilon &= \frac{|h_{N,i+1} - h_{N,i}|}{h_{N,i+1}} \times 100 && (11)
\end{aligned}$$

Цео поступак се може спровести табеларно (види табелу 1).

[1] веома често се у литетратури користи назив: **Шезијева једначина по Манингу**

Табела 1: *Одређивање вредности нормалне дубине применом Њутнове методе*

$Q = \dots$ m^3/s, $n = \dots$ m$^{-1/3}$s, $I_D = \dots$

i	$h_{N,i}$ [m]	$\alpha(h_{N,i})$	$\beta(h_{N,i})$	$F(h_{N,i})$	$F'(h_{N,i})$	$h_{N,i+1}$ [m]	ε [%]
0							
1							

Прорачун критичне дубине:

Критична дубина је дубина за коју је минимална вредност специфичне енергије[2]. То је дубина у односу на коју се течење може поделити на мирно и силовито (бурно). Услов који мора бити задовољен да би се остварила критична дубина је да је Фрудов број[3] једнак јединици:

$$F_r(h_{kr}) = \frac{Q^2\, B(h_{kr})}{g\,(A(h_{kr}))^3} = 1 \tag{12}$$

Може се показати да се решење ове једначине мора тражити приближно. Поступак који ће бити примењен је метод просте замене:

$$h_{kr,i+1} = \frac{1}{b + m\, h_{kr,i}} \sqrt[3]{\frac{Q^2\,(b + 2\, m\, h_{kr,i})}{g}} \tag{13}$$

Поступак спровести таблеарно:

Табела 2: *Одређивање вредности критичнене дубине применом методе просте замене*

$Q = \dots$ m^3/s

i	$h_{kr,i}$ [m]	$h_{kr,i+1}$ [m]	ε [%]
0			
1			

<u>Задатак 3.2</u>

Решавање овог задатка се започиње одређивањем нормалне и критичне дубине за обе деонице канала. Након тога се на скици канала уцртају обе дубине и у зависности од граничних услова одреди облик линија нивоа. Детаљи одређивања типа линије нивоа ће бити презентовани на часу.

[2]Ова енергија се још назива и енергија у односу на дно канала и једнака је:

$$e = h + \frac{v^2}{2g}$$

[3]Фрудов број представља однос између инерцијалних сила и силе тежине

Домаћи 3 - 1. део

Задатак се решава применом знања стеченог у претходна два задатка. При раду користити следеће смернице:

1. Одредити нормалну и критичну дубину за обе деонице канала,
2. Скицирати линију нивоа, обележити типове линија који се јављају и обележити смер прорачуна.

НАПОМЕНА: Свака табела мора имати наслов и уписане одговарајуће податке изнад табеле (као у објашњењима).

Објашњења задатака

Домаћи 3 - 2. део

Прорачун линије нивоа:

На предавањима је показано како се, применом динамичке једначине, може доћи до диференцијалне једначине којом се описује линија нивоа у отвореним токовима:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{I_D - I_E}{1 - F_r}, \tag{1}$$

где су: x–независна промењљива(растојање дуж канала, h–Зависна промењљива (дубина), I_D–нагиб дна канала, I_E–нагиб линије енергије,F_r–Фрудов број. При њеном извођењу је претпостављено да се губитак енергије може срачунати помоћу Шези–Манингове једначине:

$$Q = \frac{1}{n} A\, R^{2/3} \sqrt{I_E} \;\Rightarrow\; I_E = \left(\frac{n\, Q}{A\, R^{2/3}} \right)^2, \tag{2}$$

а Фрудов број је дефинисан изразом:

$$F_r = \frac{Q^2\, B}{g\, A^3} \tag{3}$$

Анализом чланова са десне стране знака једнакости у једначини (1), може се видети да све величине зависе од дубине h, па је погодно извршити замену зависне и независне промењљиве. На овај начин се долази до једначине облика:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}h} = \frac{1 - F_r}{I_D - I_E} = f(h). \tag{4}$$

Овако формулисану једначину решавамо раздвајањем промењљивих:

$$\mathrm{d}x = f(h)\mathrm{d}h, \tag{5}$$

а потом вршимо интеграцију између пресека i и $i+1$:

$$\int_i^{i+1} \mathrm{d}x = \int_i^{i+1} f(h)\mathrm{d}h \tag{6}$$

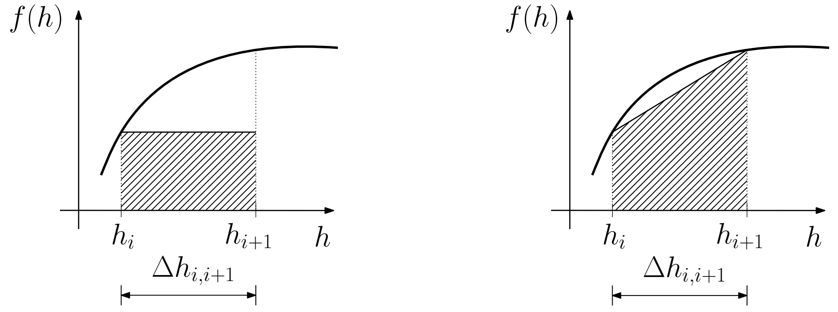
$$x_{i+1} - x_i = \int_i^{i+1} f(h)\mathrm{d}h \tag{7}$$

$$\Delta x_{i,i+1} = \int_i^{i+1} f(h)\mathrm{d}h \tag{8}$$

Интеграл са десне стране знака једнакости није могуће решити аналитички, па ћемо применити приближан поступак за његово израчунавање. У задатку ће бити примењен Ојлеров метод II реда. На слици 1 је дат приказ Ојлерове методе I и II реда. Применом Ојлерове методе II реда на једначину (8), долазимо до једначине:

$$\Delta x_{i,i+1} = \frac{f(h_i) + f(h_{i+1})}{2}\, \Delta h_{i,i+1} = \overline{f}_{i,i+1}\, \Delta h_{i,i+1} \tag{9}$$

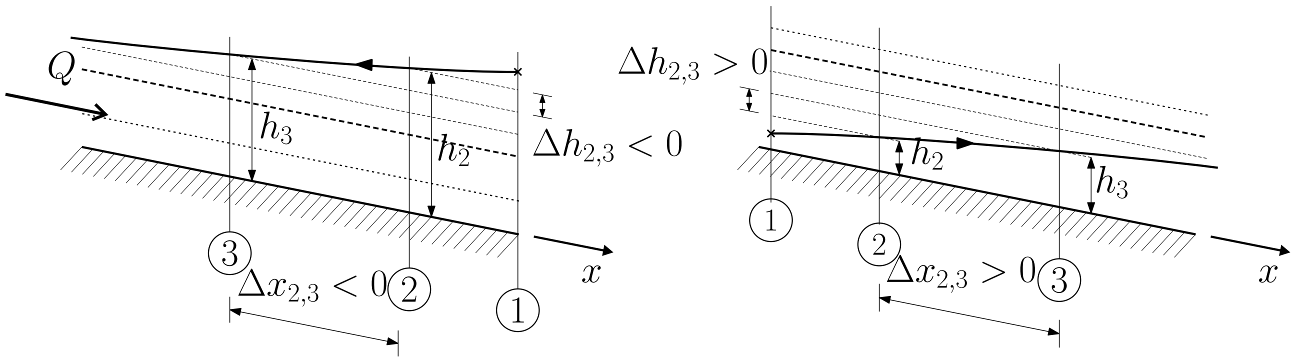
$$\int_i^{i+1} f(h)\mathrm{d}h \approx f(h_i)\,\Delta h_{i,i+1} \qquad \int_i^{i+1} f(h)\mathrm{d}h \approx \frac{f(h_i)+f(h_{i+1})}{2}\,\Delta h_{i,i+1}$$



Ојеров метод I реда Ојеров метод II реда

Слика 1: Приближно одређивање вредности интеграла

Примена једначине (9) је приказана на слици 2. Задавањем разлике дубина, добијамо растојање између пресека[1]. Потребно је обратити пажњу да се интеграција, а самим тим и обележавање пресека, врши у смеру прорачуна. Да би се добили коректни резултати, вредност разлике $\Delta h_{i,i+1}$ се уноси као негативан број ако се дубине у смеру прорачуна смањују и обратно. Ако је вредност разлике $\Delta h_{i,i+1}$ правилно задата, растојање између пресека $\Delta x_{i,i+1}$ ће бити негативно ако је смер прорачуна супротан смеру x–осе и обратно.



Слика 2: Објашњење прорачуна линије нивоа

Цео прорачун спровести табеларно.

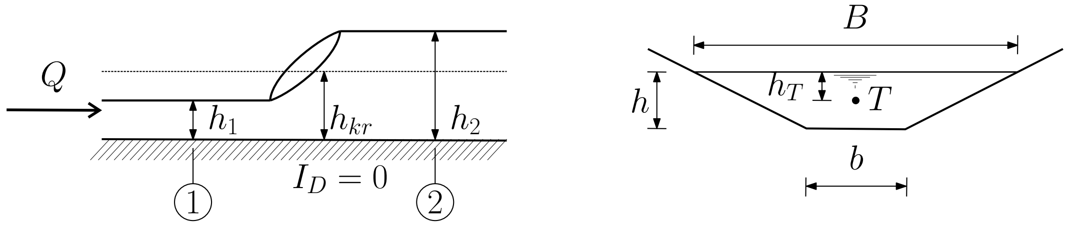
Хидраулички скок:
Хидраулички скок је појава која се јавља при преласку из бурног у миран режим течења. Шематизовани хидраулички скок је представљен на слици 3. Дубине h_1 и h_2 се називају спрегнуте дубине[2]. Често нам је позната једна дубина од ове две, а проблем је одредити њој спрегнуту. Овај проблем се решава применом динамичке једначине која се, након сређивања, може написати у облику:

$$\Phi(h) = S(h) + \frac{Q^2}{g\,A(h)} = h_T\,A(h) + \frac{Q^2}{g\,A(h)}, \tag{10}$$

[1] На слици 2 је приказан поступак за пресеке "2" и "3". Алтернативно објашњење овог поступка је да се задају дубине, а прорачуном се добијају пресеци у којима се дате дубине јављају.

[2] Примећује се да су ове две дубине такве да је дубина h_1 у бурном, а h_2 у мирном режиму течења.

где је: Φ–функција хидрауличког скока, $S(h)$– статички момент (момент I реда), h_T– растојање од слободне површине до тежишта пресека[3] (види слику 3).

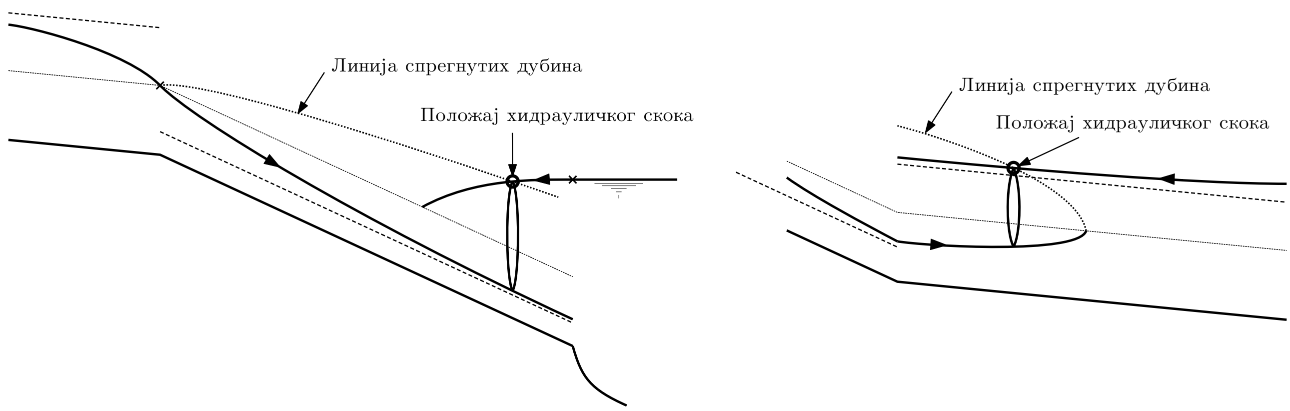


Слика 3: Приказ шеме хидрауличког скока

Услов који мора бити остварен да би се остварио хидраулички скок је да је:

$$\Phi(h_1) = \Phi(h_2) \tag{11}$$

Одређивање положаја хидрауличког скока:
Прорачуном ће бити показано да се на одређеним деоницама канала јавља прелаз из бурног у миран режим течења. Да бисмо одредили положај хидрауличког скока, потребно је за задати попречни пресек формирати функцију скока (најједноставније је нацртати њен график). Након тога, на деоници на којој очекујемо појаву х. скока, за једну линију нивоа (било коју) формирамо линију спрегнутих дубина. У пресеку линије спрегнутих дубина и линије нивоа за која припада истом режиму течења као и линија спрегнутих дубина, налази се х. скок. Овај поступак се може видети на слици 4.



Слика 4: Одређивање положаја хидрауличког скока

Будући да је дужина х. скока мала у поређењу са дужином канала, х. скок се црта као да је вертикалан.

Одређивање коте нивоа у горњем језеру:
Ниво у горњем језеру ћемо одредити применом Бернулијеве једначине за пресеке у језеру и на улазу у канал. На овај начин добијамо:

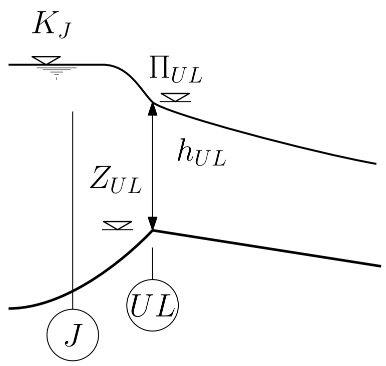
$$K_J + \underbrace{\frac{V_J^2}{2\,g}}_{\approx 0} = \underbrace{Z_{ul} + h_{ul}}_{\Pi_{ul}} + \frac{V_{ul}^2}{2\,g} + \xi_{ul}\frac{V_{ul}^2}{2\,g} \tag{12}$$

[3] За трапезни попречни пресек је:

$$h_T = \frac{h}{3}\,\frac{2b + B}{b + B}$$

Као коначан израз, добијамо:

$$K_J = Z_{ul} + h_{ul} + (1 + \xi_{ul}) \frac{V_{ul}^2}{2\,g} \tag{13}$$



Слика 5: Одређивање нивоа у горњем језеру

Смернице за решавање задатка:

1. Прорачунати сваку линију нивоа са скице (види 1. дела домаћег задатка),
2. Нацртати функцију скока,
3. Нацртати у размери на папиру А3 формата разматрану деоницу канала као и све израчунате линије нивоа,
4. На деоници где постоји могућност појаве хидрауличког скока нацртати линију спрегнутих дубина и одредити положај скока.